A-Measureについて (Function Algebraとその応用)

阪井, 章

数理解析研究所講究録
232巻 1975年 80-89

A-measure について

阪大 教養　阪井 章

Gを$\mathbb{C}^n$の有界領域とし，$\bar{G}$で連続でGで正則な関数全体のつくる関数環を$A(G)$，$A(G)$のSilov境界をΓとする（$\mathbb{C}^n$におけるGの位相的境界は∂Gであらわす）．Γ上の測度μが次の条件をみたすとき，μはA-measureと呼ばれる：

$$f_n \in A(G),\ \|f_n\| \leqslant 1,\quad {}^{\forall}z \in G\ \ f_n(z) \longrightarrow 0$$
$$\Rightarrow \qquad \lim \int f_n\, d\mu = 0.$$

この概念は，Gが$\mathbb{C}^n$の超球B_nである場合に，$A(B_n)$と$A(D^m)$（D^mは$\mathbb{C}^m$の多重円板）がBanach空間として同型でないことを示すために導入された．(Henkin [4]) この場合の基本的な結果は次の定理である．

定理 H．μがA-measure，$\nu \ll \mu \Rightarrow \nu$はA-measure．

この定理は後にGが$\mathbb{C}^n$の強擬凸領域の場合に証明された．([5])．更にCole-Rangeは[2]においてGが複素多様体の強

擬凸領域である場合に，Henkin のとは少し異なる方法で定理Hを証明した．こゝでは後の方法で述べる．

また最近，Khanh [8] は Hilbert 空間の contraction の話に関聯して，∂D^2 上の Torus T^2 の上の A-measure を扱っている．

1. $A(B_n)$ と $A(D^m)$ $(m \geqq 2)$.

$A(B_n)$ の Silov 境界は超球面 $\Sigma = \partial B_n$ である．$C(\Sigma)^*$ の閉部分空間 L_1 が structurally complete であるとは

$$\mu \in L_1,\ \nu \ll \mu \Rightarrow \nu \in L_1$$

をみたすことゝする．この時，L_1 のすべての測度に対して特異である測度全体を M_1 とすれば，

$$C(\Sigma)^* = L_1 \oplus M_1.$$

自然な埋蔵 $I: A(B_n) \longrightarrow C(\Sigma)$ を考え，$IA(B_n)$ に直交する Σ 上の測度全体を H であらわす．もし $H \subset L$ が成立するなら

$$C(\Sigma)^*/H = L_1/H \oplus M_1.$$

$H = \ker I^*$ であるから，$L = I^*L_1$，$M = I^*M_1$ とすれば

$$A(B_n)^* = L \oplus M.$$

となる．

一般にコムパクト集合 X，Banach 空間 B，B から $C(X)$ の中への同型写像 I が与えられたとき，B^* の任意の閉部分空間 M に対して，線形作用素 $S: M \to C(X)^*$ で $I^* \circ S: M \to M$

が恒等写像であるようなすべての S についての $\|S\|$ の下限を $\chi_I(M)$ であらわす. $I: B \longrightarrow C(X_1)$, $J; B \longrightarrow C(X_2)$ がともに isometric であるときには $\chi_I(M) = \chi_J(M)$ が成り立つ（[3] 参照）ので，これを単に $\chi(M)$ とかく.

上の場合 $I: A(B_n) \longrightarrow C(\Sigma)$ については $\chi(M) = 1$ である.

さて $n = 1$（このときは $B_1 = D$）の場合は，$C(T)^*$ の structurally complete な部分空間 L_1 として，T 上の Lebesgue 測度 m に対して絶対連続な測度全体をとれば，F. M. Riesz の定理によって $H \subset L_1$ であるから，上の分解が可能である. この場合 L_1，従って L は可分で，$\chi(L) = \infty$ であり，このことを用いて $A(D)$ と $A(D^m)$ が同型でないことが証明されるのである（[3]）.

$n > 1$ の場合は上のことは成立しない. 例えば Σ の部分集合 $E = \{ z \in \Sigma ;\ |z_1| = 1,\ z_2 = \cdots = z_n = 0 \}$ 上に台をもつ測度として $\frac{1}{2\pi} e^{i\theta_1} d\theta_1$ によって導かれる測度 μ をとれば，$\mu \in H$ であるが，m に対して μ は絶対連続でない. そこで Σ 上の測度 μ で，

$$\left.\begin{array}{l} f_n \in A(B_n),\ \|f_n\| \leqq 1. \\ \forall k = (k_1, \cdots, k_n),\ \dfrac{\partial^{|k|} f_n}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}(0) \rightarrow 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lim \int f_n \, d\mu = 0$$

をみたすものの全体を L_1（B_n に対する積分表示によって，これは Σ 上の A-measure 全体と一致することがわかる）とすると，

定理Hによって，L_1はstructurally complete で，明らかに$H \subset L_1$であるから，上の分解が可能である．この場合，Lはanalytic functional の空間（B_nの各点をpoint evaluation と同一視することによって，B_nを$A(B_n)^*$に埋め込んだときのB_nの$A(B_n)^*$におけるnorm closure）であって，可分である．このことから$A(B_n)$と$A(D^m)$とが同型でないことが証明されるのである（[4]）．

2. 定理Hの証明.

$\mathbb{C}^n$の開集合Uで定義されたC^∞級実関数$\rho(z)$でHermite行列$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)\right)$が$U$の各点$z$で正値であるとき，$\rho$を強多重劣調和関数と呼ぶ．$\mathbb{C}^n$の有界領域$G$が，$\bar{G}$の近傍$U$で強多重劣調和である$\rho$によって$G = \{z \in U ; \rho(z) < 0\}$とあらわされており，$\partial G$上の各点で$d\rho \neq 0$であるとき，$G$は強擬凸領域と呼ばれる．$B_n$はその特別の場合である．$A(G)$のSilov境界は$\partial G$と一致する．

G上の関数uについて，L^p-norm $(1 \leq p \leq \infty)$ およびHölder-normを夫々$\|u\|_{L^p(G)}$および$\|u\|_{H^\alpha(G)}$とし，G上の$(0,1)$形式$\omega = \sum_{k=1}^n f_k d\bar{z}_k$についてはL^p-normを$\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^p(G)} = \|\omega\|_{L^p_{(0,1)}(G)}$で定義する．$K^\infty_{(0,1)}(G) = \{\omega \in L^\infty_{(0,1)}(G) ; \bar{\partial}\omega = 0\}$とおく．

次の定理は Kerzman [7] による.

定理K. G を強擬凸領域とする. コムパクト線形作用素

$T: K^{\infty}_{(0,1)}(G) \longrightarrow C(\bar{G})$ で次の性質をみたすものがある:

(i) $u = T(\omega) \Rightarrow \bar{\partial} u = \omega$.

(ii) $\omega \in C^{\infty}_{(0,1)}(G) \Rightarrow T(\omega) \in C^{\infty}(G)$.

これから直に次のことがある.

(iii) $\omega_n \longrightarrow 0$ (weak * in $K^{\infty}_{(0,1)}(G)$) $\Rightarrow T(\omega_n) \longrightarrow 0$ (in $C(\bar{G})$).

次の定理は定理Hと同等である.

定理H′ G は強擬凸領域, μ は ∂G 上の A-measure とする.

$$f_n \in A(G),\ \|f_n\| \leqslant 1,\quad f_n(z) \longrightarrow 0 \quad (\forall z \in G)$$

$$\Rightarrow \quad f_n \to 0 \quad (\text{weak}* \text{ in } L^{\infty}(\mu)).$$

(証明). 任意の $\varphi \in C^{\infty}(\bar{G})$ に対して $\omega_n = f_n \bar{\partial}\varphi$ とおくと

$\omega_n \in K^{\infty}_{(0,1)}(G)$ で, $z \in G$ なら $f_n(z) \longrightarrow 0$ だから $\omega_n(z) \longrightarrow 0$.

$\|\omega_n\|_{L^{\infty}_{(0,1)}(G)} \leqslant M$ だから $\omega_n \to 0$ (weak * in $K^{\infty}_{(0,1)}(G)$).

(iii) から. $u_n = T(\omega_n) \to 0$ (in $C(\bar{G})$).

$F_n = f_n\varphi - u_n$ とおくと. $F_n \in A(G)$, $\|F_n\| \leqslant M'$ で $z \in G$ に対して. $F_n(z) \to 0$. $\{f_n\}$ の $L^{\infty}(\mu)$ の weak*-limit の1つを f とすれば, μ が A-measure であることから

$$\int f\varphi\, d\mu = \lim \int f_n \varphi\, d\mu = \lim \int F_n\, d\mu = 0 \qquad //$$

註) Henkinは定理Hを最初Gが超球B_nの場合に証明した([4])その方法はB_nの積分表示を用いるものである．後に[5]では$\mathbb{C}^n$の強擬凸領域Gについて積分表示式を証明し，それを用いて定理Hを証明した．上の証明はそれとは異なり，$\bar{\partial}$-問題の解の評価を用いている．$G \subset \mathbb{C}^n$の場合には，Henkinの積分表示から$\bar{\partial}$-問題の解の同様な評価が得られる([6])から証明の内容は同等といえるだろう．しかしKerzmanによる$\bar{\partial}$-問題の解は，まず局所的に積分表示式を証明して，そこで$\bar{\partial}$-問題を解き，それから大域的な解とその評価を得る方法によるので，Gが多様体の強擬凸領域の場合にも適用する．したがって上の定理H'は多様体の場合にも成立する．

3. 多重円板の場合

簡単の為，$n=2$とする．$T^2=T\times T$上のLebesgue測度をm，T上のLebesgue測度をσとする．μをT^2上の測度とするとき，T上のBorel集合eに対して

$$\mu_1(e)=|\mu|(e\times T),\quad \mu_2(e)=|\mu|(T\times e)$$

によって定まるT上の測度μ_1, μ_2をμの成分という．以下，T^2の結果はKhanh[8]によるが，証明の主なideaは[1]にあるようである．

補題 1. T上の測度で σ について絶対連続なものは A-measure である.

補題 2. μ は T^2 の測度で $f_n \in A(D^2)$, $\|f_n\| \leqq 1$ とする. 任意の $(z_0, w_0) \in D^2$ に対して $\lim \int f_n(z,w)(z-z_0)^{-1}(w-w_0)^{-1} d\mu(z,w) = 0$ ならば, T^2 の任意の Borel 集合 E に対し, $\lim \int_E f_n d|\mu| = 0$.

これは $\{g(z,w)(z-z_0)^{-1}(w-w_0)^{-1}, g \in A(D^2), (z_0, w_0) \in D^2\}$ の一次結合が $C(T^2)$ において dense なことから出る.

Lemma 1, 2 により

定理 3. μ は T^2 上の A-measure で, その成分は σ について絶対連続とする. $f_n \in A(D^2)$, $\|f_n\| \leqq 1$, $f_n(z) \to 0$ $(\forall z \in D^2)$ ならば, T^2 上の任意の Borel 集合 E に対して.

$\lim \int_E f_n d|\mu| = 0$, 故にとくに, $|\mu|$ は A-measure である.

4. 正の A-measure.

補題 4. G は $\mathbb{C}^n$ の有界領域, μ は Γ 上の正の A-measure とする. G のある点 z_0 に対して, μ が z_0 のすべての表現測度について特異であれば, $\mu = 0$.

証明は abstact F. M. Riesz の定理による.

補題 5. μ が T^2 上の正の A-measure であれば，その成分は σ について絶対連続である．したがって，$f_n \in A(D^2)$, $\|f_n\| \leq 1$, $\lim f_n(z) = 0$ ($\forall z \in D^2$) であれば，T^2 の任意の Borel 集合 E に対して $\lim \int_E f_n d\mu = 0$.

これは T 上の $\sigma(F) = 0$ なる閉集合が，A(D) の peak interpolation set であることからわかる．これに関聯して，T^2 上で $K = \{(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \in T^2 ; \theta + \varphi = 1\}$ を考え，K 上の Lebesgue 測度から導かれる T^2 上の測度を μ とすると，μ は正の測度でその成分は σ について絶対連続．しかし K が peak interpolation set であるから，μ は A-measure ではない．

定理 6. μ が T^2 上の正の A-measure，$\nu \ll \mu \Rightarrow \nu$ は A-measure.

5. A-measure の特徴づけ．

定理 7. G は $\mathbb{C}^n$ の強擬凸領域とする．∂G 上の測度 μ が A-measure であるための必要十分条件は，G の任意の 1 点 z_0 に対し，μ が z_0 の ある 表現測度に絶対連続なことである．

定理 8. T^2 上の正の測度が A-measure なる為の必要十分条件は，$z_0 \in D^2$ に対し，μ が z_0 の ある 表現測度に絶対連続なこと．

何れの場合も，z_0のある表現測度について絶対連続である測度の全体をL，Lのすべての測度に特異な測度全体をMとするとき，$\mu=\mu_a+\mu_s$，$\mu_a\in L$，$\mu_s\in M$と書ける．しかも，μが$A(G)$（又は$A(D^2)$）と直交するなら，μ_a, μ_sもそうである．必要性を示す為には，μがA-measure $\Rightarrow$ $\mu_s=0$ を示せばよいが，Gのときは定理Hから，D^2のときは定理3から，いづれも$|\mu|$がA-measureとなり証明は補題4に帰着する．十分性は，いづれの場合もz_0の表現測度が正のA-measureであることゝ，定理H又は定理6とから出る．

その他，A-measureの応用等については省略する．

引用文献

1 E.Briem, A.M.Davie and B.K.Oksendal; A Functional calculus for pairs of commuting contractions, J.London Math.Soc. (2), 7 (1973), 709-718.

2 B.Cole and R.M.Range: A-Measures on Complex Manifolds and Some Applications, J.Functional Analysis 11 (1972) 393-400.

3 G.M.Henkin:Nonisomorphism of certain spaces of functions of different numbers of variables,Funkcional.Anal. i Prilozen 1 (1967) 57-68.

4 G.M.Henkin: The Banach spaces of analytic functions in a sphere and in a bicylinder are not isomorphic, Funkcional. Anal. i Prilozen 2 (1968) 82-91.

5 G.M.Henkin: Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and some applications, Amer. Math. Soc. Transl.: Math. USSR-Sb. 7 (1969) 597-616.

6 G.M.Henkin: Integral representations of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\bar\partial$-problem, Amer. Math. Soc. Transl.: Math. USSR-Sb.11 (1970) 273-281.

7 N.Kerzman: Holder and L^p estimates for solutions of $\bar\partial u = f$ in strongly pseudoconvex domains, Comm.Pure Appl. Math. 24 (1971), 301-307.

8 B.D.Khanh: Les A-mesures sur le Tore de deux Dimensions et le Calcul Symbolique de deux Contractions Permutables J. Functional analysis 15 (1974) 33 - 44.